

Magyar-német (TKA-DAAD) kutatócsere projekt

Záró beszámoló

A projekt adatai:

Nyilvántartási szám: TEMPUS-DAAD 308015

Projektcím: HARMONIC ANALYSIS AND EXTREMAL PROBLEMS

Magyar projektvezető neve: Dr. Révész Szilárd

Magyar intézmény neve: MTA Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet

Német projektvezető neve: Dr. Bálint Farkas

Német intézmény neve: University of Wuppertal

Támogatási időszak: 2019-2021

A. A projektidőszakban elvégzett munka összefoglalása (max. 2 oldal)

Racionális ortogonális rendszereket több helyen alkalmaznak a jelfeldolgozás, valamint a rendszer- és irányításelmélet területén is. Ezen rendszerek elemei racionális törtfüggvények, melyek pólusai a zárt komplex egységkörön kívül helyezkednek el. A racionális ortogonális rendszerek egy széles osztályát alkotja a Malmquist-Takenaka rendszer (1925), amely magába foglalja többek között a trigonometrikus rendszert, illetve a Laguerre- és Kautz-rendszert is. Korábban a diszkrét Fourier transzformációhoz hasonlóan a Malmquist-Takenaka rendszernek is egy diszkrétizált változata lett bevezetve. A diszkrétizációs pontok halmazáról köztudott volt, hogy stacionárius pontjai egy logaritmikus potenciálfüggvénynek. Ezzel kapcsolatban egy Pap Margit és Schipp Ferenc által felvetett problémát vizsgáltunk.

Az eredeti Delsarte extrémális probléma véges dimenziós euklideszi terekben a Fourier transzformált origóbéli értékének maximalizálását foglalja magába, amint a célfüggvény végig fut az összes $f(0)=1$ feltételt kielégítő folytonos, pozitív definit L_1 -beli függvények halmazán melyek pozitív részének a tartója egy előre megadott zárt halmazban van. Később Dmitry Gorbachev vizsgálta az extrémális problémának egy olyan változatát, ahol a Fourier transzformált tartójára is megszorításokat tett. Ezzel a problémával kapcsolatban a közelmúltban Révész Szilárd és Elena Berdysheva megmutatták, hogy mindig létezik a problémának extrémális függvénye. A projektidőszakban hasonló problémát vizsgáltunk lokálisan kompakt Abel csoportokon.

Vizsgáltuk továbbá azt az általános kérdést, hogy egy LCA csoporton az összes nemnegatív és pozitív definit függvénynek egy megadott mértékre vonatkozó integrálját mikor lehet egy másik mértékre vonatkozó integráljának konstansszorosával felülbecsülni.

A harmonikus analízisben jelentős szerepet játszik mértékek különböző ideálok szerinti felbontása, hogy példaként csak a diszkrét-folytonos felbontást vagy az abszolút folytonos-szinguláris, ún. Lebesgue, felbontást említsük. Norbert Wiener lemmája például az egységkörön vett Borel mértékek folytonossága és a mérték Fourier együtthatóinak aszimptotikus viselkedése között teremt kapcsolatot. Kiderült azonban, hogy az ilyen típusú felbontásoknak absztrakt funkcionálanalízisbeli tartalma van. A kutatási tervbe tehát új témaként felvettünk ilyen irányú vizsgálatokat is, és ezekben a lentiekben vázoltak szerint jelentős eredményeket értünk el.

Vizsgáltunk egy a harmonikus analízisbeli-potenciáleméleti minimax problémát, amelyben bizonyos intervallumon értelmezett magfüggvények eltoltjai lokális maximumainak eloszlását sikerült messzemenő általánosságban leírni és a kapott eredményeket az approximációelméletben alkalmazni.

B. A közös projekt eredményei (max. 2 oldal)

A Malmquist-Takenaka rendszerrel kapcsolatban megmutattuk, hogy a diszkretizációs pontok nem csak stacionárius, hanem globális minimum pontjait is alkotják a kérdéses logaritmikus potenciálnak. Így választ adtunk Pap és Schipp egy kérdésére. A bizonyítás nagyban támaszkodott Gunter Semmler és Elias Wegert egy 2019-es, a logaritmikus potenciál minimum pontjaira vonatkozó eredményére. Továbbá egy bonyolultabb, előjeles mérték szerinti integrált tartalmazó logaritmikus potenciálfüggvény esetén igazoltuk, hogy Cayley transzformációval leképezve a körvonalon lévő pontrendszer esetén definiált diszkrét energiafüggvény a valós számegyeneshez definiált diszkrét energiafüggvénybe megy át, egy additív konstanstól eltekintve. Továbbá, Brian Simanek egy 2018-as eredményét is élesítettük a kidolgozott eszközökkel. Az elért eredményekről publikáció készült, amelyet az igen rangos *SIAM Journal of Mathematical Analysis* nemzetközi folyóiratban jelentettünk meg.

A megszorított feltételrendszerű Delsarte extrémális probléma kapcsán igazoltuk, hogy tetszőleges szigma-kompakt lokálisan kompakt Abel csoport esetén is érvényben marad Révész Szilárd és Elena Berdysheva eredménye, azaz létezik extrémális függvénye a problémának. Az elért eredményről publikáció készült, ugyanakkor jelenleg is aktívan dolgozunk a tétel kiterjesztésén a szigma-kompakt esetről tetszőleges Abel csoportra. A témában elkészült cikkünket az *Annali Scuola Normale Superiore di Pisa* folyóirat közlésre elfogadta.

Sikerült egy Lebesgue-típusú felbontási tételt igazolni az anti-duális pár kontextusban. Eszerint bármely pozitív operátor abszolút folytonos és szinguláris részekre bontható egy tetszőleges másik pozitív operátorra nézve. Az igazolt felbontási tétel egyszerre és messzemenően általánosítja Tsuyoshi Ando, Stanley Gudder illetve Barry Simon Hilbert-tér operátorokra, reprezentálható funkcionálokra, illetve szeszkvilineáris formákra igazolt analóg eredményét. A cikk az igen rangos *Journal of Mathematical Analysis and Applications* nemzetközi folyóiratban jelent meg.

Számos analízisbeli extrémális probléma vezet el minimax típusú kérdésekhez. Ezt 2018-2019-ben részletesen megvizsgálta Farkas Bálint, Nagy Béla és Révész Szilárd a körvonal esetén. A projektben ezen eredmények intervallumra való kiterjesztése is sikerült bizonyos speciális esetekben (amikor a magfüggvények egymásnak pozitív konstansszorosai). Az általános eset feltérképezése még folyamatban van, de a vizsgált speciális esetnek is megdöbbentő mélységű alkalmazásai vannak. Egy sikeres alkalmazási terület pl. az approxmációelméleti, súlyozott Bojanov probléma megoldása volt, de a klasszikus Csebisev probléma kapcsán is találtunk meglepő eredményeket. További alkalmazásként általános interpolációs feladatok megoldása adódott. Ezekben intervallumon minimális szuprémum normájú, egy főegyütthatós, rögzített zérus-multiplicitású általánosított polinomok viselkedésének leírása mellett egy mély homeomorfizmus tétel bebizonyítása volt a kulcs.

Megválaszoltuk azt az általános kérdést, hogy egy LCA csoporton az összes nemnegatív és pozitív definit függvénynek egy megadott mértékre vonatkozó integrálját mikor lehet egy másik mértékre vonatkozó integráljának konstansszorosával felülbecsülni. Az absztrakt felbontási tételen felül, amit megkaptunk, azt is megoldottuk, hogy abszolút folytonos illetve atomos mértékek esetén a felbontásban szereplő mértékek is abszolút folytonosak illetve atomosak, és ennek segítségével megoldottuk Andrei Efimov és a szerzők egy korábbi problémáját is.

C. Az együttműködés további szempontjai: (max. 3 oldal)

1. Mennyiben alapulnak a projekt elért eredményei a német-magyar együttműködésen?

2019-ben mindkét fél tudott utazni, 2020-ban senki, 2021-ben pedig csupán a német résztvevők tudtak röviden Magyarországon tartózkodni. (Ennek megszervezése is majdnem kudarcba fulladt az utazási korlátozások miatt.) A támogatás lehetővé tette a személyes találkozókat, és egyértelműen hozzájárult a projekt sikeréhez. Révész Szilárd (HU) és Farkas Bálint (DE)

együttműködése nagy múltra tekint vissza, az elért eredmények ezen alapulnak és ugyanehhez járul hozzá lényegesen a jelen projekt is, lehetővé téve több fiatal bevonását a közös kutatásba. A magyar, fiatal magyar résztvevők németországi tartózkodása 2019-ben, pl. tudományos konzultáción keresztül, jelentősen hozzájárult a fentiekben leírt eredményekhez. 2021-től több új német résztvevője is van a projektnek, legalább hárman pedig a projekt témájában írják mesterszakos dolgozatukat. Reményeink szerint sikerül a velük kialakított kapcsolatot a jövőben is megtartani, és doktoranduszként vesznek majd részt a projekt folytatásának tekinthető kutatásokban.

2. Hogyan befolyásolta a támogatás a projekt előmenetelét?

2019-ben mindkét oldalon nehézséget jelentett, hogy a magyar oldalon a projekt anyagi feltételei nem voltak kellően gyorsan tisztázva. Magyar doktoranduszi vagy fiatal kutatói fizetésből nehéz volt hosszútávra megelőlegezni az utazás költségeit. Ennek megfelelően magyar mesterszakos diákot nem is tudtunk bevonni az eredeti tervekkel szemben. Hasonló okokból a diákok bevonása a német oldalon, egyéb anyagi forrás hiányában, szintén nehézségekbe ütközött. Éppen ezért is kiemelkedően fontosnak tartjuk Patrizio Bifulco közös témavezetéssel elkészült alapszakos dolgozatát, és azt, hogy őt végül is sikerült résztvevőként felvenni a projektbe. 2021-ben ez a probléma nem merült fel. Sajnos azonban a járvány miatt nem tudtuk a projekt által kínált utazási lehetőséget teljes mértékben kihasználni, így pl. magyar résztvevő nem is tudott 2021-ben utazni.

Válságkezelésként 2021. novemberében a Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézetben egy mini-workshop rendeztünk, ahol a fiatal résztvevők értő matematikus közönség előtt számolhattak be kutatási témáikról. A pandémia miatt már a workshop létrejötte is óriási sikernek könyvelhető el, azonban az előadások színvonalának kimagasló volta okán, ezt a mini-workshopot tudományosan is nagyon eredményesnek tartjuk. A workshop egyértelműen nem jöhetett volna létre az anyagi támogatás nélkül. A német oldal utazási lehetőségeit sikerült szinte teljes mértékben kihasználni.

3. Hogyan csatlakozott a második évi munka az első év eredményeihez?

A második évi munka természetes folytatása az első év eredményeinek. A kutatási tervben felvetett kérdések jelentős részének végső tisztázása ezzel lezárása került.

4. Milyen szempontból volt jelentős a projekt a fiatal kutatók tapasztalatszerzése, szakmai fejlődése szempontjából?

A projekt egyik fontos célja a tudományos utánpótlásról való gondoskodás. Sikerként könyvelhetjük el, hogy egy wuppertali diák, Patrizio Bifulco, a két projektfelelős közös témavezetésével készítette el matematika alapszakos dolgozatát a harmonikus analízis egyik fontos alappilléreént jelentő Haar mérték létezéséről. Ő 2019. október elsejétől csatlakozott a projekthez, ezen belül is a lokálisan kompakt csoportokra vonatkozó kutatáshoz.

Szintén új résztvevő 2019. októberétől a német oldalról Henrik Kreidler, aki a projekt témájához szorosan kapcsolódó területen védte meg a doktori értekezését. A „szemigruppoidok” (reprezentáció)elméletében elért eredményei általánosítják a harmonikus analízisből jól ismert Peter-Weyl tételt.

Új magyar résztvevő Csiha-Nagy Zsuzsanna, aki a 2019. év folyamán csatlakozott a projekthez, és a Malmquist-Takenaka rendszert illető kutatásban, valamint Gaál Marcellel közösen a Delsarte extrémális probléma tanulmányozásában ért el eredményeket. E két témában elért eredményei és azt ezekből írt két, magasan jegyzett folyóiratban megjelent publikációja nagyban hozzá fog járulni a várhatóan 2022-ben megszerzendő PhD fokozatához is.

Két résztvevőnk, Christian Budde és Gaál Marcell a 2019. év folyamán védte meg doktori disszertációját. Gaál Marcell azonban 2020. májusában tragikusan elhunyt. A személyes

érintettségén felül ez alapvetően vetette vissza a releváns részprojektek előrehaladását is. Christian Budde egy rövidebb posztdoktori periódus után, állandó egyetemi-kutatói állást szerzett, ehhez a projektben való részvétele egyértelműen hozzájárult.

A 2021-től csatlakozó új résztvevőkről, Moritz Proell, Mehmet Erbay, Sarid Tanski, Annika Meyer, Patrick Hermle, (mindannyian diákok) elmondható, hogy a nemzetközi közegben való megmérettetés, előadástartás, tudományos konzultáció, jelentős mértékben hozzájárult illetve fog majd hozzájárulni szakmai fejlődésükhöz. Patrick Hermle 2021. októberétől doktoranduszként dolgozik egy a projekt témájához kapcsolódó kutatásban.

5. Sorolja fel azokat a hazai vagy külföldi tudományos közleményeket és publikációkat, amelyek az együttműködés eredményeként jelentek meg!

A fentebb jelzett témákban nyújtottunk be illetve szándékozunk még publikációkat benyújtani, nemzetközileg magasán jegyzett folyóiratokhoz. Emellett a matematika tudomány területén nemzetközi sztenderdek számító arxiv-preprint szerveren is elérhetővé tettük illetve tesszük ezeket az eredményeket.

Megjelent/benyújtott:

- Marcell Gaál, Béla Nagy, Zsuzsanna Nagy-Csiha, Szilárd Révész, Minimal energy point systems on the unit circle and the real line. *SIAM J. Math. Anal.* 52 (2020), no. 6, 6281–6296.
- Marcell Gaál, Béla Nagy, Zsuzsanna Nagy-Csiha, On the existence of an extremal function in the Delsarte extremal problem. *Mediterr. J. Math.* 17 (2020), no. 6, Paper No. 190, 16 pp.
- Marcell Gaál, Szilárd Révész, Integral comparisons of nonnegative and positive definite functions on LCA groups, közlésre benyújtva a *Mathematische Zeitschrift* folyóirathoz.
- Nikolai Edeko, Markus Haase, Henrik Kreidler, A Decomposition Theorem for Unitary Group Representations on Kaplansky-Hilbert Modules and the Furstenberg-Zimmer Structure Theorem, közlésre benyújtva az *Advances in Mathematics* folyóirathoz.
- Elena Berdysheva, Szilárd Révész, Delsarte's Extremal Problem and Packing on Locally Compact Abelian Groups, közlésre elfogadva az *Annali Scuola Normale Superiore di Pisa* folyóiratnál.
- Zsigmond Tarcsay, Operators on anti-dual pairs: Lebesgue decomposition of positive operators. *J. Math. Anal. Appl.* 484 (2020), no. 2, 123753, 28 pp.

Benyújtás alatt:

- Bálint Farkas, Béla Nagy and Szilárd Révész, On the weighted Bojanov-Chebyshev Problem and the sum of translates method of Fenton.
- Bálint Farkas, Béla Nagy and Szilárd Révész, A homeomorphism theorem for sums of translates.

Előkészületben:

- Bálint Farkas, Béla Nagy and Szilárd Révész, A general minimax problem for sums of translates on the interval.

6. Milyen akadályokat vagy problémákat érzékelt a projekt végrehajtása során?

2019-ben a támogatás hiánya illetve késedelme nagyban hátráltatta a projekt elkezdését. Számos fiatal, német kutató jött volna Magyarországra, de a magyar oldalon az aláírás és a pénzügyi támogatás súlyos késlekedése ezt nem tette még lehetővé, így válságtervünk szerint a német oldal látogatása a 2019. év utolsó három hónapjára koncentrált.

A 2020-2021-es koronavírusjárvány hatása semmiképpen nem hagyható figyelmen kívül. A korlátozások miatt 2020-ban egyik tervezett utazásra sem kerülhetett sor. A projektünk egy évvel való meghosszabbításában tapasztalt rugalmasság miatt hálásak vagyunk. Sajnos azonban a

2021-es év sem a várakozásoknak megfelelően alakult. A magyar kutatók hivatalosan csak 2021 szeptemberétől utazhattak külföldre, amikor viszont az egyetemi félév már megkezdődött, ez gyakorlatilag lehetetlenné tette a Németországba irányuló utazásokat. Mindemellett az utazási korlátozások és határátlépési feltételek folyamatos változása majdnem megcsákyázta a német fél magyarországi látogatásait is. (A német fél egyébként 2020. augusztusától utazhatott volna.) Emiatt is hatalmas eredménynek értékeljük a 2021. novemberi workshop megszervezését, amelyen, egy résztvevő betegség miatti kivételével, minden német projektag jelen volt.

A nehézségek ellenére, összességében nagyon pozitívan látjuk a számos fiatal kutatóból kialakított kis csapat létrejöttét, és reménykedünk abban, hogy ezt a jövőben még bővíteni is tudjuk, illetve, hogy az együttműködés a projekt lezárta után is folytatódni fog.

7. Mi a legjelentősebb szakmai eredmény, amit kiemelné a projektegységműködés kapcsán?

Tudományos eredmények:

1. Megválaszoltuk Pap Margit és Schipp Ferenc egy fontos kérdését a Malmquist-Takenaka rendszerrel kapcsolatban.
2. Bebizonyítottunk egy potenciálméleti, minimax típusú probléma kapcsán egy nagyon mély homeomorfizmus tételt, mellyel magát a minimax problémát is sikerült megoldani, és a reményeinket messze túlszárnyaló alkalmazásokat találni az approximációelméletben.
3. Egy Kaplansky-Hilbert modulusok elméletét használó relatív Jacobs-de Leeuw-Glicksberg típusú felbontást sikerült igazolni.
4. Egy LCA csoporton az összes nemnegatív és pozitív definit függvénynek egy megadott d n mértékre vonatkozó integrálját akkor lehet egy másik d n mértékre vonatkozó integráljának C konstansszorosával felülbecsülni, ha $d(Cn-m)$ előáll, mint egy nemnegatív, egy pozitív definit és egy páratlan mérték összege.

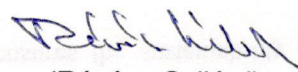
Egyéb eredmények:

1. Közös témavezetéssel végzett egy résztvevőnk a Wuppertali Egyetem matematikus alapszakán, 2019. októbertől mesterszakos hallgatóként csatlakozott a projekthez. Mesterszakos diplomamunkáját is a harmonikus analízisben fontos szerepet játszó amenábilis csoportokról írja.
2. Egy résztvevő, Patrick Hermle, a projekt ideje alatt szerzett matematikus diplomát és a projekthez tematikailag kapcsolódó kutatásban dolgozik doktoranduszként 2021-től.
3. Három résztvevőnk a 2019. év folyamán védte meg doktori értekezését.
4. 2021. novemberében miniworkshopot rendeztünk, ahol a résztvevők kutatási témáikról számolhattak be. A workshop színvonalát jól jelzi, hogy neves, aktív hazai kutatók is bekapcsolódtak, és érdeklődve hallgatták végig a színvonalas előadásokat.
5. **Sikerült egy lendületes, fiatalokból álló kutatócsoportot összekovácsolni.**

8. Van-e olyan javaslat, amivel módosítaná a pályázati felhívás és végrehajtás szempontjait a jövőre nézve?

Érdemes lenne a fejenként folyósítható összegek nagyságán emelni. 2021-ben Budapesten a német diákoknak járó 25 EUR napidíjból gyakorlatilag nem lehet elfogadható szállást találni. Ezt úgy tudtuk áthidalni, kihasználva a német résztvevők közös utazását, hogy a diákok együtt béreltek egy lakást. Az egyetemi oktatóknak járó 48 EUR szintén kevésnek bizonyult. Alapvetően feleslegesnek tartjuk a két napidíjkategória fenntartását, és üdvözlőnénk ebben némi flexibilitást. Az ilyen rövid (2 éves) futamidejű és kis összegű támogatással futó kutatási projektek esetében megítélésünk szerint nem sok értelme van éves részbeszámolókat kérni, ez gyakorlatilag fölösleges formalitás és bürokratikus többletterh.

Kelt: 2021. december 4.


(Révész Szilárd)