

## Magyar-német (TKA-DAAD) kutatócsere projekt Záró beszámoló

### **A projekt adatai:**

**Nyilvántartási szám:** 308019

**Projektcím:** Csatolt rendszerek és innovatív integrátorok

**Magyar projektvezető neve:** Dr. Csomós Petra

**Magyar intézmény neve:** Eötvös Loránd Tudományegyetem

**Német projektvezető neve:** Prof. Dr. Bálint Farkas

**Német intézmény neve:** Bergische Universität Wuppertal

**Támogatási időszak:** 2019-2021

---

### **A. A projektidőszakban elvégzett munka összefoglalása (max. 2 oldal)**

Munkánk során a gyakorlatban is fontos szerepet játszó csatolt dinamika rendszerek tulajdonságainak vizsgálatával és számítógépes megoldási módszereivel foglalkoztunk. A csatolt dinamikai rendszerek, valamint a hozzájuk tartozó közönséges és parciális differenciálegyenletek megfelelő keretet biztosítanak számos fizikai, biológiai, kémiai, pénzügyi vagy akár társadalmi jelenség matematikai vizsgálatához. Ezek az egyenletek az esetek nagy részében olyan mennyiségekre vonatkoznak, melyek ugyan különböző dinamika szerint fejlődnek (pl. természeti törvényeknek vagy matematikai modelleknek megfelelően), ők maguk azonban bizonyos (algebrai vagy differenciális) feltételek szerint összefüggnek. Az egyenletek és azok ismeretlen mennyiségeit összekötő feltételek együttesen csatolt rendszer alkotnak.

A csatolt rendszerekkel leírható folyamatok, és így azok matematikai modelljei általában igen összetettek, a hozzájuk tartozó differenciálegyenletek pontos megoldása tehát nem ismert. Sőt, sok esetben még az is előfordulhat, hogy azok létezése és egyértelműsége matematikailag még nem is bizonyított (pl. a Navier-Stokes-egyenletek esetén). A matematikai modell megoldását tehát valamilyen numerikus közelítő módszer segítségével keressük, ugyanakkor a feladatok korrekt kitűzöttségének vizsgálatára is hangsúlyt fektetünk. Numerikus módszer alkalmazása esetén mindig tudnunk kell, mennyire „jó” az általa számított közelítő megoldás. A numerikus módszerek „hasznossága” számos tulajdonság és mérőszám segítségével vizsgálható. Mindezek közül a legfontosabb a konvergencia fogalma, amely a közelítő megoldás pontos megoldáshoz való közelítését biztosítja, miközben a numerikus megoldás paramétereit finomítjuk. Új numerikus módszer bevezetésekor vizsgálandó továbbá a módszerek stabilitása, a kvalitatív tulajdonságok (pl. pozitivitás) megőrzésére való alkalmassága, a konvergencia rendje, stb.

Összetett matematikai modellek numerikus megoldása hatékonyan végezhető el az innovatív integrátorok segítségével. A projekt keretében a pályázatban bemutatott (szekvenciális vagy Lie-féle, Strang-féle, súlyozott) operátorszeleteléseket és az exponenciális integrátorokat alkalmaztuk és tanulmányoztuk. Az általunk megoldani kívánt feladatok ezen innovatív integrátorok alkalmazása nélkül nem is lennének kezelhetők, használatuk tehát alapját képezi a vizsgálatainknak.

A projektben a numerikus módszerek elméleti aspektusainak vizsgálata mellett azoknak számítógépes implementációját is elvégeztük. Az elméleti vizsgálatokhoz absztrakt operátorelméleti megközelítést alkalmaztunk. Amíg az autonóm egyenletek absztrakt numerikus analízise igen nagy múltra tekint vissza, a nemautonóm egyenleteket ebből a szempontból kevesebbet vizsgálták. Ennek elsősorban az az oka, hogy az egyenlet korrekt kitűzöttsége jóval nehezebben vizsgálható. Mindazonáltal az ilyen típusú egyenletek

természetes módon merülnek fel nemlineáris egyenlet nemstacionárius megoldása körüli linearizálásakor, vagy olyan parciális differenciálegyenletek vizsgálatakor, melyek időben változó tartományon értelmezettek. Mindezek miatt a kutatásunk egyik fő tárgya a nemautonom egyenletek numerikus megoldására vonatkozó módszerek vizsgálata volt.

A pályázatban szereplő „Tiszta sarkkör” tesztfeladatra amely a sarkköri régiókban felhalmozódott műanyag szemét áramlását hivatott vizsgálni numerikus módszerként a pályázatban bemutatott innovatív integrátorok közül az operátorszeletelési eljárást vizsgáltuk és alkalmaztuk. A problémának megfelelő matematikai modell egy csatolt dinamikai rendszer, melynek ismeretlen függvénye a műanyag szemét koncentrációja (egységnyi térfogatra eső darabszáma vagy tömege). A probléma megoldásához szükség van a környező víz sebességmezéjének megadására. Ekkor a műanyagdarabok óceánbeli transzportját egy olyan nemautonom advekción egyenlet adja meg, amelynek egyik paramétere éppen a sebességmező. A feladatra kifejlesztett megoldási módszert számítógéppel implementáltuk és numerikus kísérletekkel teszteltük.

A „Születő bolygók” témakörben a megfelelő (CsR) csatolt rendszer megadja a csillag körüli, időben változó akkréciós korongok egydimenziós szeletének matematikai modelljét. Még pontosabban, a korongokban keringő szilárd testek (por és bolygókezdemények) transzportját írja le. A folyamat végső fázisában a már kialakult bolygók (kölcsonhatva a korong gázanyagával) a központi csillag felé migrálnak. Ezen migráció egy indirekt bizonyítéka a bolygók középmozgás-rezonanciák láncolatába való befogódása. A projekt keretében a fenti módon kialakult Kepler-60 bolygórendszer stabilitási idejét vizsgáltuk az egyik matematikai tulajdonsága, a Shannon-entrópia segítségével. Ehhez a bolygórendszer mozgásegyenleteit oldottuk meg numerikus módszerrel.

A projekt végrehajtási szakaszában három résztvevő is gyermeket hozott a világra, így az ő és az elmúlt években ledoktorált és az egyetemét elhagyó projektrésztvevők helyett új tagokkal bővült a kutatócsoportunk. Az ő részvételük újabb lehetőségeket nyitott a projekt témakörén belüli kutatásokra, nevezetesen az általános csatolt rendszer és az arra alkalmazott exponenciális integrátorok vizsgálatának területén.

A pályázati projekt leírásában szereplő (CsR = csatolt rendszer) matematikai feladat egy, az alkalmazásokban igen gyakran előforduló esetét is vizsgáltuk. Ekkor az  $A$  és a  $B$  nemlineáris operátorok felírható szemilineáris alakban (azaz egy nemkorlátos lineáris és egy, matematikai szempontból könnyebben kezelhető nemlineáris tag összegeként), míg a  $C$  operátor a két ismeretlen függvény közötti lineáris csatolást adja meg. A legkézenfekvőbb példa erre az a csatolt rendszer, amikor valamilyen tartomány belsejében és annak peremén is tekintünk egy-egy fizikai/kémiai/stb. folyamatot, és a peremen vett megoldás minden időpillanatban megegyezik a tartomány belsejében vett megoldás peremértékével. A két matematikai feladat közötti csatolást tehát a peremérték jelenti. Az általunk felírt probléma azonban ennél a példánál jóval általánosabb, vagyis több alkalmazási területet is lefed. Leírhatók vele hálózatokon lezajló folyamatok, vagy akár késleltetést tartalmazó problémák is.

Munkánk során először a szekvenciális (vagy Lie-féle), a Strang-féle és a szimmetrikusan súlyozott operátorszeletelési eljárás segítségével fejlesztettünk ki egy hatékony numerikus módszert a lineáris esetben, mutattuk meg annak konvergenciáját, valamint adtunk rá egy hibabecslő formulát. Eredményünk fontosságát támasztja alá, hogy az irodalomban eddig megjelent módszerek nem rendelkeztek azzal a numerikus analízisben elvárt tulajdonsággal, amivel az általunk kifejlesztett módszer – analitikusan bizonyítottan és numerikus kísérletekkel illusztrálva – igen. A módszerünk lényege, hogy (az előző példa kifejezéseivel élve) külön kezelni a tartományon belül és annak peremén lejátszódó folyamatokat, az azokat leíró matematikai egyenleteket tehát a nekik megfelelő numerikus módszerrel oldhatjuk meg. A csatolást pedig olyan módon építi be a megoldási folyamatba, hogy az nem okozza a hagyományos módszereknél megfigyelhető rendcsökkenést.

Jelenleg ezen eredményeink általánosításán dolgozunk nemlineáris feladatok esetén a Lie- és a Strang-féle operátorszeletelés alkalmazásával. Ekkor már a pályázatban bemutatott innovatív integrátorok közül kettőt is alkalmazunk: a numerikus módszer felírásához szükség van az operátorszeletelés és egy exponenciális integrátor alkalmazására is. Előzetes eredményeink igen kedvezőek: megmutattuk, hogy a szekvenciális (vagy Lie-féle) operátorszeletelés

alkalmazása a nemlineáris esetben is elsőrendben konvergens módszerhez vezet, míg a Strang-féle szeletelés (megfelelő exponenciális integrátorral együtt alkalmazva) másodrendű módszert eredményez.

## **B. A közös projekt eredményei (max. 2 oldal)**

A közös projekt elején, 2019 áprilisában a németországi kutatók magyarországi tartózkodása során szerveztünk egy három napos workshopot, melynek keretében megismerkedtünk egymással személyesen, és eszmét cseréltünk a projektben elvégzendő munkáról. A workshopot a projektben nem résztvevő magyar kollégáim közül is látogatták. A plakátot és a szakmai programot is tartalmazó kiadványt a beszámolóhoz mellékelem.

A koronavírus járvány miatti utazási korlátozások következtében a 2020-as évben nem történtek kölcsönös utazások. Azonban amint azt a hivatalos helyzet lehetővé tette, 2021 szeptemberében újra szerveztünk egy workshopot, ahol az eddigi és a projekthez azóta csatlakozott kutatók végre személyesen is találkozhattak és megbeszéléseket tarthattak egymással. Ezen esemény plakátját és programját is csatolom a beszámolóhoz.

A projekt során máris születtek és megjelentek publikációk, benyújtás előtt is áll egy, valamint előkészületben még három. Az eredményekről nemzetközi konferenciákon is tartottunk előadásokat.

A pályázatunkban szereplő „Tiszta sarkkör” tesztfeladat elvégzéséhez felállítottunk egy modellt az óceánok műanyagszennyezés-terjedésének vizsgálatára. A kapott egyenlet advekción-diffúziós típusú, melyben egyelőre elhanyagoljuk az óceán alapzatának egyenetlenségeit és vertikális irányban a modell teljes homogenitását tételezzük fel. A kapott parciális differenciálegyenletet a Földet modellező gömbfelület mellett tetszőleges kétdimenziós peremmel rendelkező sokaságon is felírtuk, és a feladat korrekt kitűzöttségét (azaz matematikai megoldhatóságát) bizonyítottuk. A műanyagszennyezés partokon való lerakódására többféle lehetőséget építettünk be a modellbe: pl. sziklafalon nem rakódik le a műanyag, szemben a lapos kavicsos/homokos részekkel, ahol ez az áramlástól függően megtörténik. Ezeket a lehetőségeket különböző típusú peremfeltételekkel modelleztük. A pályázatban szereplő egyik innovatív integrátor, az operátorszeletelés alkalmazásával sikerült egy konzervatív sémát találnunk az egyenlet numerikus megoldására, melyet sikerrel be is programoztunk. Mivel valós életből vett problémák numerikus megoldásakor fontos szempont, hogy a kapott közelítő megoldás a valódi megoldással azonos kvalitatív, a modell interpretációjával (pl. fizikai törvényekkel) kompatibilis tulajdonságokkal rendelkezzen (pl. koncentráció ne legyen negatív, a tömeg, az energia őrződjön meg stb.), fontos eredményünk, hogy bebizonyítottuk, hogy az általunk kifejlesztett módszer megőrzi a műanyagszemét koncentrációjának pozitivitását. Eredményeinkből remélhetőleg a jövő év során publikáció születik majd.

Parciális differenciálegyenletek numerikus megoldásakor alapvető szerepet játszik a megfelelő peremfeltételek megválasztása. A projekt során tehát foglalkoztunk az ún. transzparens peremfeltételek vizsgálatával is. Ezen módszer segítségével egy egész téren definiált megoldást egy korlátos tartományon közelíthetünk. A korlátos tartomány két részre bontható: egy belső (számítási) és egy külső tartományra. A belső tartományon adott egyenlet olyan módon egyszerűsítjük, hogy az analitikusan megoldható legyen. Ekkor az analitikus megoldás hozzacsatolható a külső tartományon levő, ismeretlen megoldáshoz. Az így kapott csatolt rendszer korrekt kitűzését és a közelítő megoldásnak az egész téren definiált megoldáshoz való konvergenciáját is vizsgáltuk. Jelen kutatáshoz nélkülözhetetlen a funkcionálanalízissel foglalkozó szakemberekkel való együttműködés, konzultáció, melyre ez a projekt kitűnő lehetőséget biztosított.

A „Születő bolygók” tesztfeladat esetén a csillag körüli akkréciós korongban kialakult Kepler-60 elnevezésű bolygórendszer migrációs eredetét annak stabilitási idejének vizsgálatával valószínűsítettük. A rendszer Shannon-entrópiájának numerikus módszerekkel való kiszámításával megmutattuk, hogy a szóban forgó rendszer stabilitási ideje (ami fordítottan arányos a Shannon-entrópia időbeli megváltozásával) összemérhető a világegyetem

életkorával. Az eredményekből publikáció született, valamint azokat külföldi és hazai szemináriumok keretében is bemutattuk.

Külön foglalkoztunk a csatolt rendszerek egy olyan esetével, ami még elég általános, de már a gyakorlatban is fontos alkalmazásokat fed le. Operátorszeletelés alkalmazásával kifejlesztettünk egy olyan numerikus módszert, melynek segítségével külön oldható meg a csatolt rendszer két külön egyenlete, és a csatolás magában a numerikus módszerben jelenik meg. Ez igen hatékonyra teszi a probléma numerikus kezelését. Bebizonyítottuk, hogy a módszer konvergens, és megadtuk azokat a feltételeket, amelyek mellett a konvergencia az elvárt rendű, azaz szekvenciális (vagy Lie-féle) operátorszeletelés alkalmazása esetén elsőrendű, míg Strang-féle és szimmetrikusan súlyozott szeleteléssel másodrendű. Numerikus kísérletekkel illusztráltuk, hogy az elméleti eredményünk a gyakorlatban is realizálható. Az eredményekből publikáció jelent meg, és azokat nemzetközi konferenciákon is bemutattuk.

Jelenleg ennek a munkánknak nemlineáris feladatokra vett általánosításán dolgozunk. Már meg tudtuk mutatni, hogy a szekvenciális (vagy Lie-féle) operátorszeletelés alkalmazása ebben az esetben is elsőrendű, míg a Strang-féle szeletelés másodrendben konvergál. Fontos különbség a lineáris esethez képest, hogy a módszer kifejlesztésénél szükségünk volt egy megfelelő rendű exponenciális integrátor alkalmazására is. Ekkor a numerikus megoldást a pontos megoldás konstans variációs formulával felírt alakjához tudtuk hasonlítani, és a hibabecslést egy rekurzió segítségével vezettük le. Elméleti eredményeinket numerikus kísérletekkel illusztráltuk, amikor mind a tartomány belsejében, mind annak a peremén, egy-egy hővezetési (vagy diffúziós) egyenletet tekintettünk. Ezen munkánkból is publikáció készül, és remélhetőleg a jövő év folyamán meg is jelenik.

Következő általánosítási lehetőség, hogy a csatolásért felelős operátort nemkorlátosnak választjuk. Ezzel leírható az, a gyakorlatban igen csak fontos eset, amikor a peremen vett normális irányú derivált jelenik meg a feladatban. Mivel a szakirodalomban erre az esetre sem található még olyan hatékony numerikus módszer, ami az elvárt rendben konvergálna (azaz ne jelenne meg a rendcsökkenés), munkánk fontos hozzájárulás lesz.

### **C. Az együttműködés további szempontjai: (max. 3 oldal)**

#### **1. Mennyiben alapulnak a projekt elért eredményei a német-magyar együttműködésen?**

Teljes mértékben. A „Tiszta sarkkör” projekt eredményeinek részleteit a magyar doktori hallgatók és a magyar témavezető a németországi tartózkodásuk alatt dolgozták ki a német témavezetővel együtt dolgozva. A numerikus kódot is ebben az időszakban fejlesztettük ki. A „Születő bolygók” projekt eredményeihez nagyban hozzájárult a magyar doktori hallgatónak a német témavezetővel való konzultációja előbbi németországi tartózkodása során. Az általános lineáris és nemlineáris csatolt rendszerekre kifejlesztett numerikus módszer elméleti és számítógépes vizsgálata szintén német és magyar kutatók közös munkáján alapszik, melynek nagyszerű fórumot biztosított a két, közösen megrendezett mini-workshop is.

#### **2. Hogyan befolyásolta a támogatás a projekt előmenetelét?**

Azokban az években, amikor lehetőség volt utazni (2019-ben mindkét fél részéről, 2020-ban senki, 2021-ben a német fél részéről), a támogatás lehetővé tette a személyes találkozásokat, és ezzel nagyban hozzájárult a projekt sikeréhez.

#### **3. Hogyan csatlakozott a második évi munka az első év eredményeihez?**

A második évben az első évben befejezett „Tiszta sarkkör” és „Születő bolygók” projektek matematikai általánosítását dolgoztuk ki, és még további általánosítási lehetőségeken dolgozunk. Ebből született a csatolt dinamikai rendszereket leíró absztrakt Cauchy-feladatokra alkalmazott numerikus módszer kifejlesztésével és vizsgálatával foglalkozó publikációnk.

#### **4. Milyen szempontból volt jelentős a projekt a fiatal kutatók tapasztalatszerzése, szakmai fejlődése szempontjából?**

A közösen tartott mini-workshopok lehetőséget biztosítottak a fiatal kutatóknak, hogy kis létszámú, családi hangulatban lezajló események keretében mutassák be munkájukat szakmai szempontból felkészült kutatók előtt, akik így észrevételeikkel, tanácsaikkal segíteni tudták további munkájukat. A külföldi utak alkalmával kialakított személyes és szakmai kapcsolatok bizonyára fontos részei lesznek a fiatal kutatók későbbi pályafutásának (akár jövőbeli közös kutatási projektek képében). További fontos szempont, hogy a fiatal kutatók eddigi munkájuk során csak a megszokott közegükben, a már jól ismert életterükben dolgoztak, a projekt segítségével azonban bepillantást nyerhettek egy másik országbeli egyetem, kutatói közösség munkakörnyezetébe, munkafolyamataiba, hétköznapjaikba.

Minden fiatal résztvevőről elmondható, hogy a nemzetközi közegben való megmérettetés, előadástartás és tudományos konzultáció jelentős mértékben hozzájárult illetve hozzá fog majd járulni a szakmai fejlődésükhöz. A tapasztalatcsere különböző matematikai iskolából származó kutatók között kiszélesíti a résztvevők tudását és látásmódját.

#### **5. Sorolja fel azokat a hazai vagy külföldi tudományos közleményeket és publikációkat, amelyek az együttműködés eredményeként jelentek meg!**

##### Megjelent tudományos folyóiratcikkek:

E. Kóvári, B. Érdi, Zs. Sándor: Application of the Shannon entropy in the oplanar (non-restricted) four-body problem: The long-term stability if the Kepler-60 exoplanetary system, Mon. Not. Royal Astron. Soc., 509:884-893 (2022)

P. Csomós, B. Farkas, M. Ehrhardt, B. Farkas: Operator splitting for abstract Cauchy problems with dynamical boundary condition, Operators and Matrices, 15:903-935 (2021)

P. Csomós, B. Takács: Operator splitting for space-dependent epidemic model, Applied Numerical Mathematics ,159: 259-280 (2021)

C. Budde and M. Kramar Fijavž: Bi-continuous semigroups for flows in infinite networks, Netw. Heterog. Media, 16:553-567 (2021)

C. Budde and B. Farkas: A Desch-Schappacher perturbation theorem for bi-continuous semigroups, Mathematische Nachrichten, 293:1053-1073 (2020)

##### Folyóiratcikk benyújtás előtt:

P. Csomós, B. Farkas, B. Kovács: Error estimates for a splitting integrator for semilinear boundary coupled systems

##### Folyóiratcikkek előkészületben:

P. Csomós, B. Farkas, B. Kovács: Application of Strang splitting for semilinear boundary coupled systems

P. Csomós, B. Farkas, Sz.György, B. Takács: Mathematical analysis of plastic contamination of the oceans of Earth

##### A projekt időtartama alatt annak résztvevői által megírt PhD dolgozatok:

Á. Bodó: Járványterjedési folyamatok vizsgálata statikus és adaptív hálózatokon, Eötvös Loránd Tudományegyetem

C. Budde: General Extrapolation Spaces and Perturbations of Bi-Continuous Semigroups, Bergische Universität Wuppertal, témavezető a szintén projektrésztvevő Prof. Dr. Bálint Farkas

A. Clevenhaus: High-Order hybrid Combination Technique Methods For Parabolic Equations in Multiple Space Dimensions For American Option Pricing Problems, Bergische Universität Wuppertal, témavezető a szintén projektrésztvevő Prof. Dr. Matthias Ehrhardt

L. Kapllani: A Multistep Scheme to solve Backward Stochastic Differential Equations for Option Pricing on GPUs, Bergische Universität Wuppertal, témavezető a szintén projektrésztvevő Prof. Dr. Matthias Ehrhardt

M. Muniz: Approximating correlation matrices using stochastic Lie group methods, Bergische Universität Wuppertal, témavezető a szintén projektrésztvevő Prof. Dr. Matthias Ehrhardt

B. Takács: Investigating space dependent epidemic models and the collapse of Easter Island, Eötvös Loránd Tudományegyetem

## **6. Milyen akadályokat vagy problémákat érzékelt a projekt végrehajtása során?**

A 2019-es évben mind a németországi, mind pedig a magyarországi kutatók utaztatásában valós problémát jelentett a magyar oldalról érkezendő napidíj, illetve utazási támogatás igen késői időpontban való folyósítása. Ilyen feltételek mellett nehézségekbe ütközött olyan fiatal kutatót, hallgatót találni, aki lakhatását/utazását önerőből finanszírozni tudta. Ez a probléma a 2021-es évben már nem ütötte fel a fejét.

A 2020-2021-es években nyilvánvalóan nem lehet eltekinteni a koronavírus-járvány hatásaitól. A 2020-as évben a korlátozások miatt egyetlen utazás sem tudott megvalósulni, így a projektünk egy évvel meghosszabbodott. Ám sajnos a 2021-es év sem úgy zajlott, ahogy azt vártuk. A magyar kutatók hivatalosan 2021 szeptemberéig nem utazhattak külföldre, akkor azonban már a szemeszter kezdődött az egyetemen, ami miatt mind a oktatóknak, mind pedig a (doktori) hallgatóknak nehézkes lett volna elutazniuk. Ráadásul az utazási korlátozások, peremfeltételek is folyamatosan változtak (Németország október közepén nyilvánította Magyarországot magas rizikójú területnek). Mivel az érintett német egyetemeken a szemeszter később kezdődött, a német kutatóknak még volt lehetőségük Magyarországra utazni, így tudtuk megszervezni a szeptemberi mini-workshopot és azzal együttjáró közös megbeszéléseket és munkát.

Külön szót ejtenék annak a magyar doktori hallgatónak az esetéről, aki novemberben utazott volna Wuppertalba, de azon túl, hogy a 45.000 Ft-os utazási hozzájárulás nem lett volna elég, hogy fedezze az utazási költségeit, a németországi napidíja alacsonyabb volt, mint hogy abból egy olcsó szállodai szobát, kis apartmant vagy akár az egyetem vendégházában egy szobát bérelhessen (megjegyzem, utóbbi már nem is állt rendelkezésre). A koronavírus-járvány okozta helyzetben a szállások ára igen megemelkedett, és az őszi időszakban (mikor újraindulhattak az utazások) az üres szobák száma igen megcsappant. A hallgató utazása így sajnos meghiúsult.

## **7. Mi a legjelentősebb szakmai eredmény, amit kiemelne a projektegyüttműködés kapcsán?**

A tudománymetrikai mérőszámokon, vagyis a közös publikációkon és kialakult új szakmai kapcsolatokon kívül igen fontosnak tartom egy külföldi egyetem megismerését (mind magyar, mind német oldalról) és a személyes találkozókat, utóbbiakat főként a koronavírus-járvány miatti lezárások fényében. Meglátásom szerint mindkét aktív évben jó hangulatú, szakmailag és az emberi kapcsolatok tekintetében is gyümölcsöző találkozások történtek a projekt keretében. Ha mindenáron szakmai eredményt kell kiemelnem, akkor az általánosított csatolt rendszer közelítő megoldására vonatkozó numerikus módszer-család kifejlesztését és annak elvárt rendben való konvergenciájának bizonyítását tartom a legjelentősebb szakmai eredménynek. A szakirodalomban eddig ugyanis nem szerepelt olyan módszer, amely ezekre a feladatokra az elvárt rendben konvergált volna.

**8. Van-e olyan javaslat, amivel módosítaná a pályázati felhívás és végrehajtás szempontjait a jövőre nézve?**

Mindenképpen rugalmasabbá tenném az odaítélt forrás felhasználását, nyilván előzetes indoklás és elbírálás alapján. Amennyiben a 6. pontban említett doktori hallgatónak (a szállások árának ilyen arányú emelkedése okán) kiutalhattunk volna nagyobb napidíjat, el tudott volna utazni. Ez természetesen a témavezetők belátásán múlik, jelen esetben azonban senki mástól nem vett volna el forrást, vagyis lehetőséget az utazásra, külföldi munkára.

Hasonló gondolat fogalmazódik meg a német kutatók magyarországi napidíjával kapcsolatban. A (doktori) hallgatóknak adható 9000 Ft jóval kevesebb a professzoroknak adható 18.000 Ft-nál, holott a lakhatásuk ugyanannyiba kerül. Budapesti szállás nem hogy napi 9000 Ft-ért, de még 18.000 Ft-ért sem nagyon található, főleg amikor a járványhelyzet okán szűk határidővel kell döntést hozni az utazás dátumát illetően. Nem hiszem, hogy csupán akadémiai előmenetelük (vagy akár életkoruk) alapján ekkora különbség lenne az emberek szállás iránti igényében. Javaslom a két kategória eltörlését, vagy legalábbis a különbségek kiegyenlítését.

Mindazonáltal meg kell jegyezni, hogy a gyermekszületés okán a projektből kimaradt magyar és német kolleginák, valamint a ledoktorálásuk után az egyetemet elhagyó projektrésztvevők más tagokkal való helyettesítése során az ügyintézés nagy fokú rugalmasság jellemezte.



Aláírás

Kelt: 2021. december 3.

## COUPLED SYSTEMS AND INNOVATIVE TIME INTEGRATORS

BUDAPEST  
15-17 APRIL, 2019  
ELTE SOUTH 3-518

MAGNUS INTEGRATORS

OPERATOR SEMIGROUPS

EVOLUTION FAMILIES

OPERATOR SPLITTING

NAVIER–STOKES EQUATIONS

EXPONENTIAL INTEGRATORS

$$\mathcal{U}(t_2, t_1)\mathcal{U}(t_1, t_0) = \mathcal{U}(t_2, t_0)$$

$$u_{n+1} = e^{\tau A}u_n + \int_0^\tau e^{(\tau-s)A}g(u_n)ds$$



**PETRA CSOMÓS // ELTE**  
**BÁLINT FARKAS // BUW**  
**MATTHIAS EHRHARDT // BUW**



## SOCIAL EVENTS

Monday, 15 April, 18:00

Dinner at Trófea Grill

which is an all-inclusive buffet restaurant with a wide variety of dishes, including traditional Hungarian food, grilled meat and vegetables prepared according to your choice and taste, dessert, alcoholic and non-alcoholic drinks, etc.

Address: Hauszmann Alajos utca 6/B

Scan the QR code to see a map how to get there:



Tuesday or Wednesday, 16 or 17 April, 13:30

Sightseeing tour in Budapest

The Hungarian capital is famous for its historic downtown and the hospitality of its inhabitants. During an afternoon walk we try to present both. Depending on the weather conditions, we will visit the Buda as well as the Pest side of the Danube, and look down at the city from the castle.

Recommended: good shoes for walking, a bottle of water, camera, and pen for writing postcards 😊

## VENUE

Eötvös Loránd University, Faculty of Science

Eötvös Loránd Tudományegyetem  
Természettudományi Kar

ELTE TTK

ELTE is the oldest university in Hungary. The teaching of natural sciences has been in the University since the beginning of 1635. Already in the first years, they taught mathematics and physics within the faculty of philosophy, and in the second half of the 18<sup>th</sup> century the teaching of chemistry, biology and earth sciences was completed. The Faculty of Science at ELTE is the largest institution in the country where all natural sciences are represented at the highest level.

Address: Pázmány Péter sétány 1/C

Scan the QR code to see a map how to get there:



The workshop is held in the red **South Building**, on the 3<sup>rd</sup> floor, in room number **3-518**. There is a white board and a projector with laptop to support your presentation.

## Workshop on DAAD Project Coupled Systems and Innovative Time Integrators

15-17 April, 2019  
Eötvös Loránd University  
Budapest

INFORMATION

PARTICIPANTS

PROGRAMME

WORKSHOP ON DAAD PROJECT *CMS*  
COUPLED SYSTEMS AND INNOVATIVE TIME INTEGRATORS

BUDAPEST  
15-17 APRIL, 2019  
ELTE SOUTH 3-518

MAGNUS INTEGRATORS      OPERATOR SEMIGROUPS      EVOLUTION FAMILIES  
OPERATOR SPLITTING      NAVIER-STOKES EQUATIONS      EXPONENTIAL INTEGRATORS

$$\mathcal{U}(t_2, t_1) \mathcal{U}(t_1, t_0) = \mathcal{U}(t_2, t_0)$$
$$u_{n+1} = e^{t_n A} u_n + \int_0^{t_n} e^{(t_n-s)A} g(u_s) ds$$

BERGISCHE UNIVERSITÄT WUPPERTAL      DAAD      BALINT FARKAS // BUW  
MATTHIAS EHRHARDT // BUW

## PROGRAMME

<b>MONDAY</b>	9:00	<b>Bálint Farkas</b>	Analytic semigroups
	10:30	break	
	10:45	<b>Christian Budde</b>	An introduction to non-autonomous problems
	12:15	lunch	
	13:30	<b>Szilvia György</b>	Exponential dichotomy and stability of delay differential equations
	14:00	<b>Michelle Muñiz</b>	Lie group methods for matrix ODEs and SDEs
	14:30	break	
	15:00	discussion	
	17:00	walk to dinner	
	18:00	dinner at Trófea Grill	Hauszmann Alajos utca 6/B
<b>TUESDAY</b>	9:00	<b>Matthias Ehrhardt</b>	Operator splitting schemes
	10:30	break	
	10:45	<b>Petra Csomós</b>	Exponential and Magnus integrators
	12:15	lunch	
	13:30	discussion	or sightseeing (depends on the weather situation)
	10:00	<b>Lorenc Kaplani</b>	Multistep schemes for solving backward stochastic differential equations on GPU
	10:30	<b>Anna Clevenhaus</b>	ADI schemes for option pricing in the Heston model with stochastic correlation
	11:00	break	
	11:15	<b>Bálint Takács</b>	Numerical solution of space dependent SIR models
	11:45	lunch	
	13:30	discussion	or sightseeing (depends on the weather situation)
<b>WEDNESDAY</b>			

## Coupled Systems and Innovative Time Integrators

The project is financed by the German–Hungarian bilateral grant nr. 308019 of German Academic Exchange Service (DAAD) and Tempus Public Foundation (TKA).

Coupled systems and the underlying equations provide the mathematically tractable model for many phenomena that occur in physics, biology, chemistry, social sciences or economics. Hence the efficient numerical treatment of such problems is at the basis of our civilization and therefore has been attracting an increasing amount of attention parallel to the technological development.

We carry out the mathematical study of three mathematical procedures for the numerical solution of such coupled problems: 1) Operator splitting 2) Magnus integrators 3) Exponential Runge–Kutta methods. We further develop these, and provide the theoretical basis for their applicability.

With the help of the combination of the developed methods we model 3 problems of extremely high importance: 1) (plastic) contamination of Arctic 2) urban smog 3) early phase of planet formation.

<http://www-ama.math.uni-wuppertal.de/~ehrhardt/Projects/CSITI.html>

# WORKSHOP ON DAAD PROJECT *C<sub>phi</sub>tau*

## COUPLED SYSTEMS AND INNOVATIVE TIME INTEGRATORS

BUDAPEST  
20-21 SEPTEMBER 2021  
ALFRÉD RÉNYI INSTITUTE

STOCHASTIC DIFFERENTIAL EQUATIONS

OPERATOR SEMIGROUPS

NETWORKS

DYNAMIC BOUNDARY CONDITIONS

MULTISTEP METHODS

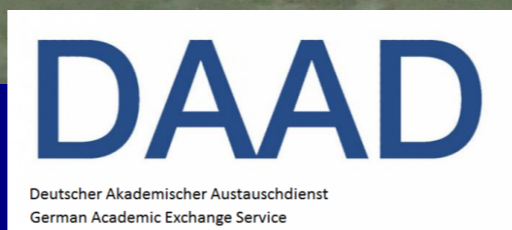
EXPONENTIAL INTEGRATORS

$$T(t)T(s) = T(t+s)$$

$$u_{n+1} = e^{\tau A} u_n + \int_0^{\tau} e^{(\tau-s)A} g(u_n) ds$$



BERGISCHE  
UNIVERSITÄT  
WUPPERTAL



Deutscher Akademischer Austauschdienst  
German Academic Exchange Service

PETRA CSOMÓS // RÉNYI  
SZILÁRD RÉVÉSZ // RÉNYI  
BÁLINT FARKAS // BUW

## SOCIAL EVENTS

Monday, 20 September, 19:00

Dinner at Trófea Grill

which is an all-inclusive buffet restaurant with a wide variety of dishes, including traditional Hungarian food, grilled meat and vegetables prepared according to your choice and taste, dessert, alcoholic and non-alcoholic drinks, etc.

Address: Király utca 30-32

Scan the QR code to see a map how to get there:



Wednesday, 22 September, 13:00

Sightseeing tour in Budapest

The Hungarian capital is famous for its historic downtown and the hospitality of its inhabitants. During a morning walk we try to present both. Depending on the weather conditions, we will visit the Buda as well as the Pest side of the Danube, and look down at the city from the castle.

Recommended: good shoes for walking, a bottle of water, camera, and pen for writing postcards 😊

## VENUE

Alfréd Rényi Institute of Mathematics



The institute was founded by a government decree in 1950 as the Institute for Applied Mathematics of the Hungarian Academy of Sciences. Its first director was Alfréd Rényi, who headed the Institute till his early death in 1970.

Address: Reáltanoda utca 13-15

Scan the QR code to see a map how to get there:



The workshop is held in the **Great Lecture Hall** (first floor). There is a large blackboard and a projector with laptop to support your presentation.

## Workshop on DAAD Project Coupled Systems and Innovative Time Integrators

20-21 September 2021  
Alfréd Rényi Institute of Mathematics  
Budapest

## INFORMATION & PROGRAMME

WORKSHOP ON DAAD PROJECT *CfP*  
COUPLED SYSTEMS AND INNOVATIVE TIME INTEGRATORS  
BUDAPEST  
20-21 SEPTEMBER 2021  
ALFRÉD RÉNYI INSTITUTE

STOCHASTIC DIFFERENTIAL EQUATIONS    OPERATOR SEMIGROUPS    NETWORKS  
DYNAMIC BOUNDARY CONDITIONS    MULTISTEP METHODS    EXPONENTIAL INTEGRATORS

$$T(t)T(s) = T(t+s)$$
$$u_{n+1} = e^{A_n} u_n + \int_0^t e^{(t-s)A} g(u_s) ds$$

**Ri**    BERGISCHE UNIVERSITÄT WUPPERTAL    **DAAD**    PETRA CSOMÓS // RÉNYI SZILÁRD RÉVÉSZ // RÉNYI BÁLINT FARKAS // BUW

## PROGRAMME

10:30	<b>Eszter Sikolya</b>	Stochastic reaction-diffusion equations on networks
11:20	break	
11:40	<b>Emese Kövári</b>	Application of the Shannon entropy in the planar four-body problem
12:30	lunch	
14:00	<b>Imre Fekete</b>	Local error estimation and step size control in adaptive linear multistep methods
14:50	break	
15:10	<b>Merlin Schmitz</b>	Exponential integrators: An introduction
16:00	discussion	
19:00	dinner at Trófea Grill	Király utca 30–32

## MONDAY

## TUESDAY

9:00	<b>Balázs Kovács</b>	$L_2$ error estimates for wave equations with dynamic boundary conditions
9:50	break	
10:10	<b>Michelle Muniz</b>	Stochastic Runge-Kutta-Munthe-Kaas schemes for stochastic differential equations on manifolds
11:00	<b>Tim Binz</b>	Operators with dynamic boundary conditions on
12:00	lunch	
14:00	discussion	

## Coupled Systems and Innovative Time Integrators

The project is financed by the German–Hungarian bilateral grant nr. 308019 of German Academic Exchange Service (DAAD) and Tempus Public Foundation (TKA).

Coupled systems and the underlying equations provide the mathematically tractable model for many phenomena that occur in physics, biology, chemistry, social sciences or economics. Hence the efficient numerical treatment of such problems is at the basis of our civilization and therefore has been attracting an increasing amount of attention parallel to the technological development.

We carry out the mathematical study of three mathematical procedures for the numerical solution of such coupled problems: 1) Operator splitting 2) Magnus integrators 3) Exponential Runge–Kutta methods. We further develop these, and provide the theoretical basis for their applicability.

With the help of the combination of the developed methods we model 3 problems of extremely high importance: 1) (plastic) contamination of Arctic 2) urban smog 3) early phase of planet formation.

<http://www-ama.math.uni-wuppertal.de/~ehrhardt/Projects/CSITI.html>